

Варіант 1

Початковий рівень

1. (1 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + 3 \cos x$$

Розв'язок:

$$F(x) = -\frac{4}{x} + 3 \sin x + C$$

2. (2 б) Установіть, чи є функція F первісною функції f на множині \mathbb{R} :

А) $F(x) = x^4 - 3, f(x) = 4x^3$

Б) $F(x) = 5x - \cos x, f(x) = 5 + \sin x$

Розв'язок:

А) $F(x) = x^4 - 3, f(x) = 4x^3$

$F'(x) = 4x^3 \Rightarrow$ функція F є первісною функції f на множині \mathbb{R} , так як $F'(x) = 4x^3 = f(x)$

Б) $F(x) = 5x - \cos x, f(x) = 5 + \sin x$

$F'(x) = 5 + \sin x \Rightarrow$ функція F є первісною функції f на множині \mathbb{R} , так як $F'(x) = 5 + \sin x = f(x)$

3. (3 б) Обчисліть інтеграл:

А) $\int_{0,25}^{0,5} \frac{dx}{x^2}$

Б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

Розв'язок:

А) $\int_{0,25}^{0,5} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0,25}^{0,5} = -2 + 4 = 2$

Б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

4. (3 б) Для функції $f(x) = 3 - \frac{4}{\sin^2 2x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A) \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

Розв'язок:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{\sin^2 2x}$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = 3x + 2\operatorname{ctg} 2x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + C$$

$$C = -2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$$

Відповідь: $F(x) = 3x + 2\operatorname{ctg} 2x$

5. (1 б) Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$

Розв'язок:

$$S = \int_{-1}^0 (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(-2 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x^2$ та $y = 12x$

Розв'язок:

Знайдемо точки перетину $y = 3x^2$ та $y = 12x$:

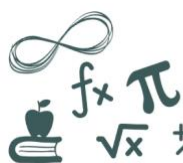
$$3x^2 = 12x$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array} \quad \text{(Межі інтегрування)}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 12x dx - \int_0^4 3x^2 dx = \int_0^4 (12x - 3x^2) dx = \frac{12x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \Big|_0^4 = 6x^2 - x^3 \Big|_0^4 \\
 &= 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 96 - 64 = 32 \text{ (кв. од.)}
 \end{aligned}$$



Варіант 2

Початковий рівень

1. (1 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

$$f(x) = \frac{6}{x^3} + 2 \sin x$$

Розв'язок:

$$F(x) = -\frac{6}{2x^2} - 2 \cos x + C = -\frac{3}{x^2} - 2 \cos x + C$$

2. (2 б) Установіть, чи є функція F первісною функції f на множині \mathbb{R} :

А) $F(x) = x^5 - 2x, f(x) = 5x^4 - 2$

Б) $F(x) = 2x + 5 \operatorname{ctg} x, f(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x}$

Розв'язок:

А) $F(x) = x^5 - 2x, f(x) = 5x^4 - 2$

$F'(x) = 5x^4 - 2 \Rightarrow$ функція F є первісною функції f на множині \mathbb{R} ,
так як $F'(x) = 5x^4 - 2 = f(x)$

Б) $F(x) = 2x + 5 \operatorname{ctg} x, f(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x}$

$F'(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x} \Rightarrow$ функція F є первісною функції f на множині \mathbb{R} ,
так як $F'(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x} = f(x)$

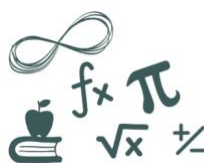
3. (3 б) Обчисліть інтеграл:

А) $\int_{-1}^2 2x^3 dx$

Б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$

Розв'язок:

А) $\int_{-1}^2 2x^3 dx = \frac{2x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{2 \cdot (-1)^4}{4} = 8 - \frac{2}{4} = 7 \frac{2}{4} = 7,5$



$$\begin{aligned} \text{Б)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx &= -2 \cos \frac{1}{2} x \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

4. (3 б) Для функції $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку А) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

Розв'язок:

$$f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = 2 \operatorname{tg} 3x + x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + C$$

$$C = -2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = 2$$

Відповідь: $F(x) = 2 \operatorname{tg} 3x + x + 2$

5. (1 б) Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = -1$

Розв'язок:

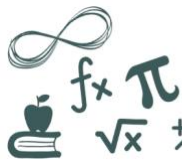
Знайдемо точку перетину графіку функції $y = 1 - x^3$ з віссю Ox :

$$1 - x^3 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1 \text{ (Верхня межа інтегрування)}$$

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^3) dx = x - \frac{x^4}{4} \bigg|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2 \text{ (кв. од.)}$$



6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x^2$ та $y = 30x$

Розв'язок:

Знайдемо точки перетину $y = 3x^2$ та $y = 30x$:

$$3x^2 = 30x$$

$$3x^2 - 30x = 0$$

$$3x(x - 10) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{array} \right| \text{ (Межі інтегрування)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{10} 30x dx - \int_0^{10} 3x^2 dx = \int_0^{10} (30x - 3x^2) dx = \left. \frac{30x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \right|_0^{10} \\ &= 15x^2 - x^3 \Big|_0^{10} = 15 \cdot 10^2 - 10^3 = 1500 - 1000 = 500 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$